Variansi dan Kovariansi

Bahan Kuliah *II2092 Probabilitas dan Statistik*

Oleh: Rinaldi Munir
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB

Variansi

- Kita sudah memahami bahwa nilai harapan peubah acak X seringkali disebut rataan (*mean*) dan dilambangkan dengan μ.

- Tetapi, rataan tidak memberikan gambaran dispersi atau pencaran data. Rataan dari masing-masing peubah acak berbeda mungkin sama, meskipun distribusinya tidak sama. Oleh karena itu diperlukan besaran lain yang menggambarkan sebaran data.

- Selain rataan, besaran lain yang sangat penting dalam probstat adalah variansi, simpangan baku, dan kovariansi.

Definisi. Misalkan *X* adalah variabel random dengan distribusi peluang f(X) dan rataan μ. Variansi dari *X* adalah:

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

jika *X* diskrit, dan

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

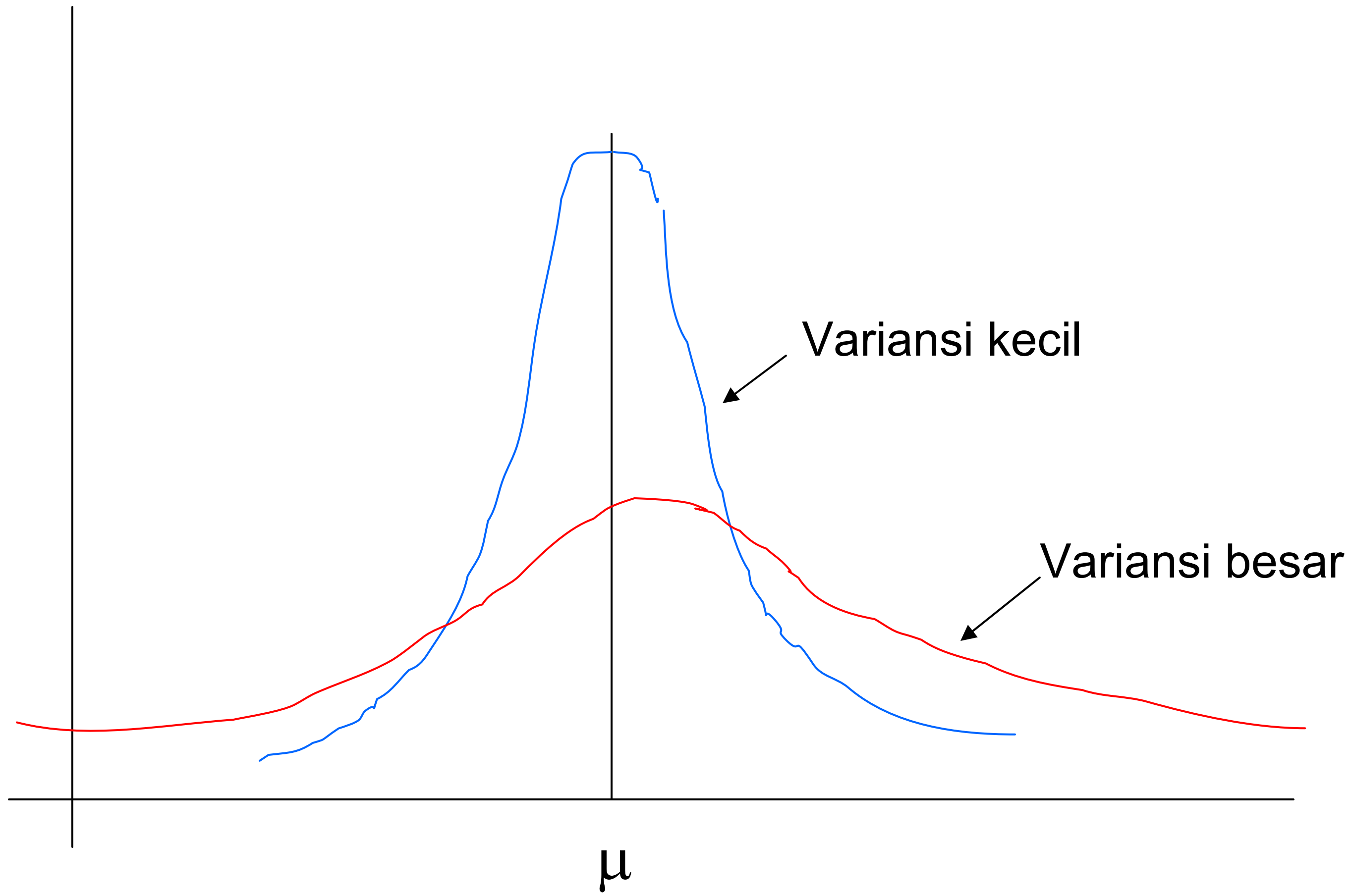
jika *X* kontinu.

Akar kuadrat dari variansi disebut dengan **deviasi standar** atau **simpangan baku** dari *X* dan dilambangkan dengan σ

- **Interpretasi**: Nilai $x - \mu$ disebut penyimpangan suatu pengamatan dari rataannya. Karena penyimpangan ini dikuadratkan lalu dirata-ratakan, maka σ^2 akan lebih kecil untuk kelompok nilai x yang dekat μ dibandingkan dengan kelompok nilai x yang jauh dari μ.

- Dengan kata lain, jika nilai-nilai x cenderng terkonsentrasi di dekat rataannya, maka variansinya kecil. Sedangkan jika jauh dari rataan maka variansinya besar.

- Perhatikan bahwa variansi selalu positif (mengapa?), dan simpangan baku adalah akar positif dari variansi.


Variansi kecil
Variansi besar
μ

Contoh 1. Diberikan disribusi peluang sbb:

x	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.4	0.3

Hitunglah variansi dari *X.*

Jawaban:

$$\mu = E(X) = 1(0.3) + 2(0.4) + 3(0.3) = 2.0$$

$$\sigma^2 = \sum_{x=1}^{3} (x-2)^2 f(x)$$

$$= (1-2)^2(0.3) + (2-2)^2(0.4) + (3-2)^2(0.3) = 0.6$$

- Variansi juga dapat dihitung dengan rumus lain yang lebih mudah, yaitu:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

- **Contoh 2**. Misalkan X menyatakan banyaknya bagian yang cacat dari suatu mesin bila 3 suku cadang diambil secara acak dari proses produksi. Distribusi peluang *X:*.

x	0	1	2	3
f(x)	0.51	0.38	0.10	0.01

Hitunglah variansi dari X

<u>Jawaban</u>:

μ = E(X)=(0)(0.51) + (1)(0.38) + (2)(0.10) + (3)(0.01) = 0.61

$E(X^2)$ = (0)(0.51) + (1)(0.38) + (4)(0.10) + (9)(0.01) = 0.87

Jadi, $\sigma^2 = 0.87 - (0.61)^2 = 0.4979$

- **Latihan**. Sebuah panitia beranggotakan 3 orang dipilih secara acak dari 4 orang mahasiswa STI dan 3 orang mahasiswa IF. Hitung variansinya.

  (jawaban ada pada slide berikut ini)

Jawaban:

$$\mu = E(X) = (0)(1/35) + (1)(12/35) + (2)(18/35) + (3)(4/35) = 12/7$$

$$E(X^2) = (0)(1/35) + (1)(12/35) + (4)(18/35) + (9)(4/35) = 24/7$$

Jadi, $\sigma^2 = 24/7 - (12/7)^2 = 24/29$

- **Contoh 3.** Misalkan X menyatakan permintaan minyak goreng (dalam liter) menjelang hari raya. Fungsi padat dari *X* sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1), 1 < x < 2 \\ \\ 0, \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Cari rataan dan variansi X.

<u>Jawaban</u>:

$$\mu = E(X) = 2\int_1^2 x(x-1)dx = \frac{5}{3}$$

$$E(X^2) = 2\int_1^2 x^2(x-1)dx = \frac{17}{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{17}{6} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

Variansi untuk peubah acak lain yang bergantung pada X, yaitu g(X), diberikan dala teorema di bawah ini.

Teorema. Misalkan *X* adalah peubah acak dengan distribusi peluang *f(x)*. Variansi dari peubah acak *g(X)* adalah

$$\sigma_{g(X)}^2 = E\left[\left(g(X) - \mu_{g(X)}\right)^2\right] = \sum_x \left[g(X) - \mu_{g(X)}\right]^2 f(x)$$

jika X diskrit, dan

$$\sigma_{g(X)}^2 = E\left[\left(g(X) - \mu_{g(X)}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(X) - \mu_{g(X)}\right]^2 f(x)dx$$

jika X kontinu

Contoh 4. Hitunglah variansi dari *g(X)* = 2*X* + 3, bila *X* adalah peubah acak dengan distribusi peluang

x	0	1	2	3
f(x)	1/4	1/8	1/2	1/8

Jawaban:

$$\mu_{2X+3} = E(2X+3) = \sum_{x=0}^{3}(2x+3)f(x) = 6$$

$$\begin{aligned}\sigma^2_{2X+3} &= E\{[(2X+3) - \mu_{2X+3}]^2\} \\ &= E\{[2X+3-6]^2\} = E(4X^2 - 12X + 9) \\ &= \sum_{x=0}^{3}(4X^2 - 12X + 9)f(x) = 4\end{aligned}$$

Kovariansi

Misalkan *X* dan *Y* adalah variabel random dengan distribusi peluang gabungan *f(x, y)*. Kovariansi dari *X* dan *Y* adalah

$$\sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x-\mu_x)(y-\mu_y)\, f(x,y)$$

jika *X* dan *Y* diskrit, dan

$$\sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)(y-\mu_y) f(x,y)\, dxdy$$

Jika X dan Y kontinu

Interpretasi: Kovariansi antara dua peubah acak menunjukkan sifat asosiasi (hubungan) antara keduanya;

Jika kedua peubah tersebut bergerak kearah yang sama (X membesar dan Y membesar) maka hasil kali $(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$ cenderung bernilai positif;

Jika bergerak kearah berlawanan (*X* membesar dan *Y* mengecil), maka hasil kali $(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$ cenderung akan bernilai negatif.

Tanda kovariansi (+ atau -) menunjukkan apakah hubungan antara kedua peubah acak positif atau negatif.

Kovariansi juga dapat dihitung bila dengan rumus yang lebih mudah sebagai berikut:

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

Contoh 5. Misalkan X = jumlah ballpoint warna biru, dan Y = jumlah *ballpoint* warna merah. Bila dua ballpoint diambil secara acak dari kotak, distribusi peluang gabungannya sudah dihitung pada contoh terdahulu, yaitu:

f(x,y)	x=0	x=1	x=2	h(y)
y=0	2/28	9/28	3/28	15/28
y=1	3/14	3/14		3/7
y=2	1/28			1/28
g(x)	5/14	5/18	3/28	1

Hitunglah kovariansi dari *X* dan *Y*

Jawaban:

$$\sigma_X = E(X) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xf(x,y) = \sum_{x=2}^{2} xg(x)$$

$$= (0)\left(\frac{5}{14}\right) + (1)\left(\frac{15}{28}\right) + (2)\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\sigma_Y = E(Y) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} yf(x,y) = \sum_{x=2}^{2} yh(y)$$

$$= (0)\left(\frac{15}{28}\right) + (1)\left(\frac{3}{7}\right) + (2)\left(\frac{1}{28}\right) = \frac{1}{2}$$

Sehingga diperoleh

$$\sigma_{xy} = E(XY) - \mu_X\mu_Y = \frac{3}{14} - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{56}$$

Contoh 6. X bagian pelari pria dan Y bagian pelari wanita yang menempuh lomba maraton mempunyai distribusi peluang gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ \\ 0 \quad \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ yang lain} \end{cases}$$

Hitunglah kovariansi *X* dan *Y*

Jawaban:

Distribusi marginal *X* dan *Y* adalah

$$g(x) = \begin{cases} 4x^3, 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \quad \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases} \qquad h(y) = \begin{cases} 4y(1-y^2), 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain} \end{cases}$$

Dari fungsi peluang diatas diperoleh

$$\mu_X = E(X) = \int_0^1 4x^4 dx = \frac{4}{5}$$

$$\mu_Y = E(Y) = \int_0^1 4y^2(1-y^2) dy = \frac{8}{15}$$

sehingga

$$\sigma_{XY} = E(XY) = \mu_X \mu_Y = \frac{4}{9} - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{8}{15}\right) = \frac{4}{225}$$

Sifat-Sifat Variansi

- **Teorema 1**. Jika *a* dan *b* adalah konstanta maka

$$\sigma^2_{aX+b} = a^2\sigma^2_X = a^2\sigma^2$$

Akibat 1: Jika a = 1, maka $\sigma^2_{X+b} = \sigma^2_X = \sigma^2$

Akibat 2: Jika b = 0, maka $\sigma^2_{aX} = a^2\sigma^2_X = a^2\sigma^2$

- **Teorema 2.** Jika X dan Y adalah peubah acak dengan distribusi peluang f(x,y) maka

  $$\sigma^2_{aX+bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y + 2ab\sigma_{XY}$$

  Akibat 1: Jika X dan Y peubah acak saling bebas, maka:

  $$\sigma^2_{aX + bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y$$

  Akibat 2: Jika X dan Y variabel random saling bebas, maka:

  $$\sigma^2_{aX - bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y$$

- **Contoh 7**. Jika *X* dan *Y* adalah peubah acak dengan variansi $\sigma^2_X = 2$, $\sigma^2_Y = 4$ dan kovariansi $\sigma_{XY} = -2$, hitunglah variansi dari peubah acak

  $Z = 3X - 4Y + 8.$

  <u>Jawaban</u>:

  $\sigma^2_Z = \sigma^2_{3X\text{-}4Y+8}$

  $= \sigma^2_{3X\text{-}4Y}$ (menurut Akibat 1 Teorema 1)

  $= 9\sigma^2_X + 16\sigma^2_Y - 24\sigma_{X\,Y} = 130$